Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 2, 2003. Pàg. 59–71

Punts de vista probabilístics en anàlisi*

José G. Llorente

Les influències mútues entre probabilitat i anàlisi han afavorit el desenvolupament d'aquestes dues branques de la Matemàtica. És ben conegut que l'adopció de conceptes i eines provinents de l'anàlisi ha estat clau en el desenvolupament de la teoria de la probabilitat moderna. Aquest article pretén reivindicar el flux d'idees en l'altra direcció. L'ús de tècniques probabilístiques en anàlisi ha experimentat un èxit considerable durant els últims vint anys i, sorprenentment, molts resultats recents en teoria geomètrica de funcions poden ser interpretats i resolts de manera més transparent quan es tradueixen en termes discrets.

1 Introducció

A finals dels anys vuitanta, N. G. Makarov va demostrar en una sèrie d'articles força influents ([25], [26], [27], [28]) un conjunt de resultats profunds sobre comportament frontera d'aplicacions conformes, com a conseqüència de les propietats asimptòtiques de martingales discretes a l'interval unitat.

La paraula que resumeix el bon funcionament del diccionari continu-discret en aquest context és *cancel·lació*. Simplificant molt, podríem dir que si una quantitat evoluciona de manera que en cada etapa les seves possibles variacions positiva i negativa es compensen (cancel·lació), llavors el més probable a llarg termini és que els seus valors siguin considerablement inferiors als valors màxims teòrics. És a dir, sempre que hi ha cancel·lació, s'ha d'esperar una millora. Aquest principi general, que serà precisat més endavant en alguns casos particulars, ocupa un lloc central en l'evolució de la probabilitat i l'anàlisi modernes.

* Conferència pronunciada a la sisena Trobada Matemàtica de la SCM, celebrada el 4 d'abril de 2003 dedicada al centenari d'A. Kolmogorov. Treball finançat parcialment pels projectes DGICYT BFM 2002-04072-102-02 i SGR 149275, 149255.

Hi ha una relació estreta entre aplicacions conformes i funcions harmòniques. És ben conegut que les funcions harmòniques del pla són exactament les funcions contínues que satisfan una propietat extra de cancel·lació: el valor en un punt és la mitjana dels valors en qualsevol cercle centrat al punt. Veurem en la secció següent que una martingala diàdica és un anàleg discret prou satisfactori i molt més simple d'una funció harmònica. Per tant, és natural esperar alguna mena de paral·lelisme entre el comportament frontera de funcions harmòniques o analítiques i el comportament asimptòtic de martingales diàdiques. A vegades aquest paral·lelisme és força directe i fructífer, com veurem més endavant.

2 Un exemple bàsic

Considerem el joc d'atzar segons el qual un jugador guanya o perd una unitat en cada jugada amb probabilitat $1/2$. Denotem per X_k el guany net en la jugada k (per tant, $X_k = 1$ o -1). Si S_n és el seu capital després de n jugades, aleshores

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \,.$$

En llenguatge probabilístic, les X_k són variables de Bernoulli independents, idènticament distribuïdes, amb

$$P\{X_k = 1\} = 1/2 = P\{X_k = -1\} \,.$$

Aquest exemple pot ser reformulat de diverses maneres. Podem pensar en un caminant aleatori que surt de l'origen i es desplaça, en cada etapa, una unitat cap a la dreta o cap a l'esquerra amb probabilitat $1/2$. Aquest moviment és un model d'un *passeig aleatori* pels enters. S_n significa la posició del caminant després de n etapes.

Una altra possible formulació, més del gust dels analistes, és la següent: interpretem els guanys parcials a l'interval $[0,1]$ mitjançant les funcions de Rademacher $X_k(t)$ definides per

$$X_k(t) = \text{signe}(\sin(2^k \pi t)) \,.$$

Observem que $X_k(t)$ alterna els signes ± 1 als *intervals diàdics d'ordre* k: $[0, 2^{-k})$, $[2^{-k}, 2 \times 2^{-k}), \ldots, [(2^k - 1)2^{-k}, 1]$

Llavors, els capitals del jugador en les diferents etapes del joc es representen per la successió de funcions $S_n(t)$, on

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(t) \;, \;\; t \in [0,1] \,.$$

Aquí, cada possible evolució del joc després de n etapes es correspon amb un interval diàdic a $[0,1]$ d'ordre n i una evolució infinita del joc es correspon amb un punt de l'interval $[0,1]$. La funció de probabilitat associada a $[0,1]$ s'identifica canònicament amb la mesura de Lebesgue.

3 Martingales diàdiques

Fixem-nos en la formulació de l'exemple de la secció anterior en termes de les funcions de Rademacher. Denotem per $\mathcal{D}_n$ la família dels intervals diàdics d'ordre n:

$$\mathcal{D}_n = \{[0, 2^{-n}), \dots, [(2^n - 1)2^{-n}, 1]\} .$$

Llavors observem que la successió de funcions $S_n(t)$ té dues propietats bàsiques:

$$S_n \text{ és constant en cada interval diàdic } I \in \mathcal{D}_n . \tag{1}$$

Si $J \in \mathcal{D}_{n-1}$, i J_1, J_2 són els dos descendents diàdics d'ordre n de J,

$$S_{n-1}|_J = \frac{1}{2}(S_n|_{J_1} + S_n|_{J_2}) . \tag{2}$$

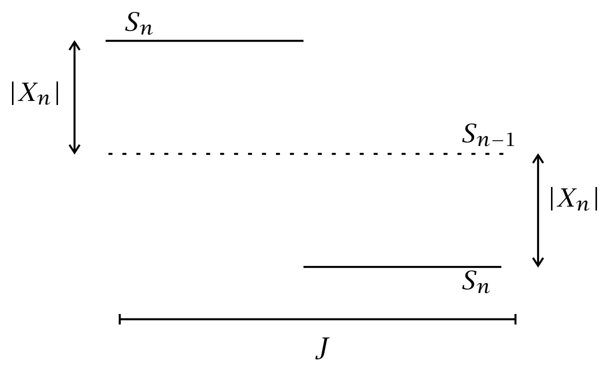

FIGURA 1

Una successió de funcions (S_n) amb les propietats (1), (2) es diu una *martingala diàdica* a $[0, 1]$. Les diferències $X_k = S_k - S_{k-1}$ s'anomenen *increments* de la martingala. En particular $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Com a la secció 2, S_n també es pot interpretar com el capital del jugador després de la jugada n quan les apostes no són necessàriament constants, sinó que s'aposta una quantitat $|X_k|$ a la jugada k. Llavors (2) expressa el fet que el joc és just en el sentit que el capital esperat del jugador després de cada jugada és el mateix que el capital abans de la jugada. Quan X_k són les funcions de Rademacher, ens referirem a partir d'ara a la martingala $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ com la martingala de Rademacher o el camí aleatori usual.

Observem que (2) pot ser considerada com una versió discreta de la propietat de la mitjana per a funcions harmòniques al pla i és, per tant, responsable de moltes de les analogies entre funcions harmòniques i martingales.

4 La llei del logaritme iterat

Des dels orígens de la teoria de la probabilitat l'exemple de la secció 2 ha plantejat diversos problemes fonamentals. N'esmentarem aquí un: el problema de l'ordre de magnitud. Observem que, com $|X_k| = 1$, tenim una estimació trivial per a S_n:

$$|S_n| \leq n \,.$$

Però, de fet, qualsevol de les possibilitats $S_n = n$ o $S_n = -n$ exigeix que el jugador guanyi (o perdi) en cadascuna de les n primeres jugades, la qual cosa és bastant improbable (només té probabilitat 2^{-n}). És natural pensar que a llarg termini el més probable és que es produeixi una millora, en el sentit que $|S_n|$ sigui notablement inferior a n amb probabilitat 1. La llei forta dels grans nombres és un primer resultat en aquesta direcció:

1 Teorema (Borel 1905) *Si S_n és com abans, aleshores,*

$$\frac{S_n}{n} \to 0$$

amb probabilitat 1*.*

Així doncs, la llei forta ja és una manifestació del principi

$$\text{cancel·lació} \Rightarrow \text{millora}$$

en acció! No obstant això, la llei forta no dóna la resposta òptima. Tan sols diu que, amb probabilitat 1, el capital S_n és bastant més petit que n, el màxim possible, però no diu quina és la millor estimació. Podria arribar a ser de l'ordre de $\sqrt{n}$? I de $n^{3/4}$? La resposta —extraordinàriament precisa— a aquesta qüestió ve donada per un dels teoremes més profunds i elegants de la teoria de probabilitat: la llei del logaritme iterat (LLI).

2 Teorema (LLI, Khintchine, 1924) *Si S_n és com a la secció 2, aleshores*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\,, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = -1$$

amb probabilitat 1*.*

Una conseqüència qualitativa interessant de la LLI és que

$$\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\,, \quad \liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \tag{3}$$

amb probabilitat 1. En termes del capital del jugador, (3) té una interpretació inquietant: a llarg termini el jugador passa successivament per moments de gran eufòria (guanya molt, S_n és molt gran) i de gran frustació (perd molt, S_n és molt gran negativa) i aquestes fluctuacions es produeixen indefinidament.

Des del punt de vista del caminant aleatori, això vol dir que el seu moviment és terriblement oscil·lant: passa successivament de posicions molt allunyades de l'origen a la dreta fins a posicions molt allunyades a l'esquerra, també indefinidament. En particular ha de visitar l'origen infinites vegades, suposant, és clar, que el moviment no s'atura mai.

A banda d'aquesta conseqüència qualitativa, la LLI és important perquè dóna l'estimació exacta de l'ordre de magnitud de les fluctuacions. A partir de la LLI podem afirmar que, amb probabilitat 1, els guanys o les pèrdues després de la jugada n no superaran l'ordre de magnitud $\sqrt{n \log\log n}$ i, a més, s'hi acostaran infinites vegades. Igualment, amb probabilitat 1, el nostre caminant aleatori es trobarà, després de l'etapa n, a una distància màxima de l'origen de l'ordre de $\sqrt{n \log\log n}$ i assolirà aquest ordre de magnitud infinites vegades.

La determinació de l'estimació òptima en la LLI té una història interessant: per a sumes de variables de Bernoulli idènticament distribuïdes Hausdorff (1913) va demostrar $S_n = O(n^{1/2+\epsilon})$ i Hardy-Littlewood van aconseguir la millora $S_n = O(\sqrt{n \log n})$. El resultat precís és de Khintchine (1924 [19]). Kolmogorov (1929 [20]) va obtenir una LLI per a variables independents generals. Lleis del logaritme iterat per a martingales van ser obtingudes per Lévy (1954 [21]) i Stout (1970 [34]). A continuació enunciem una versió particular de la LLI que necessitarem en les aplicacions posteriors ([34], [28]):

3 Teorema (LLI per a martingales diàdiques) *Sigui* $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ *una martingala diàdica a* $[0,1]$. *Suposem que* $\sup_k |X_k| \le 1$. *Aleshores*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(t)}{\sqrt{2n \log\log n}} \le 1 \tag{4}$$

per a gairebé tot $t \in [0,1]$ *(en sentit de la mesura de Lebesgue), amb igualtat quan* S_n *és la martingala de Rademacher.*

5 El problema del comportament frontera

Un dels problemes bàsics en teoria geomètrica de funcions és l'estudi del comportament frontera de certes classes de funcions. Suposem que u és una funció definida al disc unitat del pla complex $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Com que u només està definida al disc obert, és natural preguntar-se què es pot dir sobre els valors de u quan ens acostem radialment a un punt $e^{i\theta}$ de la frontera.

Tenint en compte l'analogia entre martingales diàdiques i funcions harmòniques, cal esperar paral·lelismes entre el comportament asimptòtic d'una martingala diàdica a $[0,1]$ i el comportament radial d'una funció harmònica a $\mathbb{D}$. De moment heurísticament, és convenient tenir present la identificació

$$S_n(t) \leftrightarrow u((1-2^{-n})e^{i2\pi t}) . \tag{5}$$

Comentarem aquí dues raons que justifiquen l'interès en l'estudi del comportament frontera de funcions harmòniques o analítiques al disc unitat.

En primer lloc, si Ω és un domini simplement connex del pla complex, el teorema de representació de Riemann ([32]) afirma que hi ha una aplicació conforme f de $\mathbb{D}$ en Ω. Així, moltes qüestions poden ser transferides d'un domini general al disc, mitjançant l'aplicació conforme. El bon funcionament d'aquest mecanisme de transferència requereix relacionar la geometria de Ω amb la distorsió de la frontera del disc per f, i això últim està controlat pels valors frontera de la derivada f'.

El segon exemple també té sabor geomètric. El teorema d'uniformització ([4]), que generalitza el teorema de representació de Riemann, diu que si S és una superfície de Riemann no excepcional llavors existeix una aplicació recobridora $\pi : \mathbb{D} \to S$. A $\mathbb{D}$ hi ha la *mètrica de Poincaré* , que és una mètrica riemanniana completa (la frontera es troba a distància infinita), de curvatura -1 i tal que les geodèsiques que parteixen de l'origen són els radis. La mètrica de Poincaré es pot transferir, via π, a la superfície, de manera que π esdevé una isometria local, la qual cosa implica que les geodèsiques a S que parteixen del punt $\pi(0)$ són exactament les imatges per π dels radis que surten de 0 (vegeu la figura 2). Si v és una funció harmònica a S, llavors la composició $u = v \circ \pi$ és harmònica a $\mathbb{D}$ i els valors frontera radials de u es corresponen amb els valors de v al llarg de les geodèsiques que parteixen de $\pi(0)$. Aquest mètode permet a vegades reduir qüestions geomètriques sobre geodèsiques en una superfície a problemes de valors frontera.

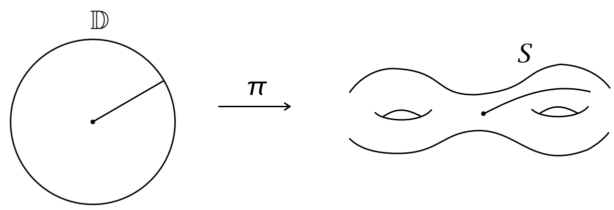

FIGURA 2

6 Martingales i funcions. Les classes de Bloch

Fins ara les analogies entre martingales i funcions harmòniques que hem vist són només heurístiques. El pas següent és plantejar-se si hi ha una forma de construir una martingala diàdica a partir d'una funció harmònica i, si això fos possible, quina és la relació entre la martingala i la funció original.

La resposta a la primera pregunta es basa en la tècnica de *projecció*. Suposem que u és una funció definida a $\mathbb{D}$ amb *bones* propietats de cancel·lació a la frontera, en el sentit que, per a cada interval $I \subset [0,1]$, existeix el límit

$$S_I = \lim_{r\to 1} \frac{1}{|I|} \int_I u(re^{i2\pi t})\, dt$$

on $|\cdot|$ denota longitud. Aleshores és immediat comprovar que l'assignació

$$S_n|_I = S_I \tag{6}$$

per a cada $I \in \mathcal{D}_n$ defineix una martingala diàdica (S_n) a $[0,1]$.

Pel que fa a la segona pregunta, la resposta ([28]) diu que la relació entre u i (S_n) és força satisfactòria quan u pertany a una classe especial de funcions harmòniques (la *classe de Bloch*). Veurem que en aquest cas la martingala (S_n) associada pel mètode de projecció té la propietat que els seus increments són uniformement acotats:

$$\sup_k |X_k| < \infty\,. \tag{7}$$

Per tal d'introduir la classe (harmònica) de Bloch, interpretarem (7) en un context continu. L'analogia (5) fa pensar que busquem funcions u que verifiquin

$$|u(z) - u(w)| \le C \quad \text{si} \quad |z - w| \le \frac{1}{2}(1 - |z|)\,. \tag{8}$$

Quan expressem (8) en termes del gradient, obtenim la *classe harmònica de Bloch* $\mathcal{B}_h$:

$$\mathcal{B}_h = \{u \text{ harmònica a } \mathbb{D} : \sup_{|z|<1} (1 - |z|)\, |\nabla u(z)| < \infty\}\,.$$

Anàlogament, definim la *classe analítica de Bloch* $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \{f \text{ analítica a } \mathbb{D} : \sup_{|z|<1} (1 - |z|)\, \left|f'(z)\right| < \infty\}\,.$$

Suposem que $u \in \mathcal{B}_h$. Ara podem precisar quina és la relació directa entre u i la martingala (S_n) definida per (6). No és difícil demostrar que (S_n) aproxima u en el sentit que, per a cada $t \in [0,1]$,

$$|u(re^{i2\pi t}) - S_n(t)| \le C \tag{9}$$

si $1 - 2^{-(n-1)} \le r \le 1 - 2^{-n}$ (aquí C és una constant que només depèn de u). En particular, de (8), (9) es dedueix que (S_n) té increments uniformement acotats:

$$|X_n| \le 2C\,.$$

La importància de (9) en aquest context és crucial perquè permet traduir directament una pregunta sobre comportament radial de funcions a la pregunta corresponent sobre comportament asimptòtic de martingales amb l'única condició que sigui estable per pertorbacions acotades.

Com a exemple de la potència del mètode, obtindrem la llei del logaritme iterat per a funcions de Bloch. Recordem que si $u \in \mathcal{B}_h$, per definició $|\nabla u(re^{i\theta})| = O((1 - |z|)^{-1})$. Per integració resulta l'estimació trivial:

$$u(re^{i\theta}) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right).$$

A partir de (9) i de la LLI per a martingales diàdiques (4) deduïm directament la LLI per a funcions de Bloch ([25]), que proporciona l'ordre de creixement correcte.

4 Teorema (LLI per a funcions de Bloch) *Si $u \in \mathcal{B}_h$ aleshores per a gairebé tot $\theta \in [0, 2\pi]$:*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{u(re^{i\theta})}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}} \le C < \infty\,. \tag{10}$$

Les classes de Bloch tenen estrets lligams amb moltes àrees de l'anàlisi ([30], [33]). A continuació veurem dos exemples bàsics.

a) Aplicació conforme

Sigui Ω un domini pla simplement connex i $f : \mathbb{D} \to \Omega$ una aplicació de Riemann. El teorema de distorsió de Koebe ([30]) diu que la distorsió produïda per f és essencialment constant en cada disc amb radi comparable a la distància a la frontera. De manera més precisa, hi ha una constant absoluta M tal que:

$$M^{-1} \le \frac{|f'(w)|}{|f'(z)|} \le M$$

si $|z - w| \le \frac{1}{2}(1 - |z|)$. En particular:

$$u = \log|f'| \in \mathcal{B}_h \tag{11}$$

(11) és responsable de la relació entre aplicacions conformes i la classe de Bloch.

b) Sèries lacunars

Els següents polinomis trigonomètics són regularitzacions de la martingala de Rademacher:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2^k\theta) \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(2^k\theta)\,. \tag{13}$$

S'observa que (12) i (13) són, respectivament, la part real i la part imaginària de la restricció a la circumferència unitat de $\sum_{k=1}^{n} z^{2^k}$. La sèrie sencera

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$$

és un exemple d'una *sèrie lacunar*. De fet, $g(z) \in \mathcal{B}$.

Les sèries lacunars posseeixen nombroses propietats interessants. Per exemple, si

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} z^{2^k}$$

aleshores $f \in \mathcal{B}$ i es pot demostrar que el comportament radial de f és extremament oscil·lant en el sentit que la imatge de gairebé tot radi és un subconjunt dens del pla complex. ([30], vegeu l'analogia amb (3)). A més, f té una propietat força curiosa: pot *perseguir* corbes. Simplificant molt, això vol dir que, donada una corba qualsevol del pla, existeix com a mínim un radi (de fet, molts) tal que la imatge per f d'aquest radi s'acosta eventualment a la corba amb qualsevol marge d'error prèviament fixat. Més gràficament, amb una funció de Bloch (com ara f) es pot reproduir qualsevol llibre amb la condició que estigui escrit d'un sol traç! ([31], [11], [29]).

7 Dues aplicacions

a) *Aplicació conforme. Mesura harmònica*

Com que $u = \log|f'| \in \mathcal{B}_h$ si $f : \mathbb{D} \to \Omega$ és conforme, la LLI per a funcions de Bloch admet la següent formulació en termes d'aplicació conforme:

5 Teorema (LLI per aplicacions conformes) *Hi ha una constant absoluta C tal que, si $f : \mathbb{D} \to \Omega$ és conforme, llavors per a gairebé tot $\theta \in [0, 2\pi]$*

$$\limsup_{r \to 1} \frac{|\log|f'(re^{i\theta})||}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}} \leq C\,. \tag{14}$$

L'estimació (14) és clau en la resolució d'un problema fonamental en teoria geomètrica de funcions: l'estructura mètrica de la mesura harmònica. Suposem que Ω és un domini simplement connex del pla i $f : \mathbb{D} \to \Omega$ una aplicació conforme, amb $f(0) = z_0$. Si $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω i $E \subset \partial\Omega$, definim la *mesura harmònica* de E des de z_0, $\omega(E)$, com la probabilitat que un viatger aleatori dins el domini Ω arribi per primer cop a la frontera justament a E. Un famós teorema de Kakutani ([18]) afirma que $\omega(E)$ coincideix amb el valor a z_0 de la funció harmònica a Ω amb valors frontera 1 a E i 0 a $\partial\Omega \setminus E$. A partir d'això és fàcil expressar la mesura harmònica en termes de l'aplicació conforme: $\omega(E) = \frac{1}{2\pi}|f^{-1}(E)|$.
Si $\partial\Omega$ és *suau*, és intuïtivament clar que

$$\omega(D(\xi, r) \cap \partial\Omega) \simeq r$$

on $D(\xi, r)$ denota el disc de centre $\xi \in \partial\Omega$ i radi r (vegeu la figura 3). La dependència de $\omega(D(\xi, r) \cap \partial\Omega)$ respecte de r en el cas que Ω sigui un domini simplement connex general és un problema profund que ha atret l'atenció de molts analistes il·lustres, com ara Beurling, Lavrentiev i Carleson. La resposta precisa és de Makarov (1985, [25]). Diu que per a la *majoria* de ξ's:

$$\omega(D(\xi,r)) \le r \exp\left\{ C\sqrt{\log\frac{1}{r}\log\log\log\frac{1}{r}} \right\}$$

i, a més, aquesta estimació és òptima per a molts dominis amb frontera fractal. La LLI (14) és un ingredient bàsic de la demostració de Makarov.

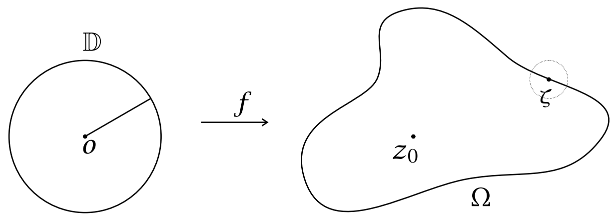

FIGURA 3

b) Geodèsiques

Tornem a l'exemple de les geodèsiques en una superfície de Riemann de la secció 5. Considerem una superfície de Riemann S amb la forma d'un *donuts* periòdic d'infinits forats (vegeu la figura 4). Si $\pi : \mathbb{D} \to S$ és l'aplicació recobridora, per a cada direcció unitària v de sortida hi ha una única geodèsica $\gamma_v(t)$ que surt de $\pi(0)$ amb velocitat inicial v. Com que la velocitat al llarg de la geodèsica és constant, tenim l'estimació trivial

$$\mathrm{dist}_S(\pi(0), \gamma_v(t)) \le t$$

on dist_S denota la distància riemanniana de la superfície S. Però de fet, la LLI per a funcions de Bloch (10) proporciona una millora substancial:

$$\mathrm{dist}_S(\pi(0), \gamma_v(t)) = O(\sqrt{t\log\log t})$$

per a gairebé tota direcció de sortida v. S'observarà l'analogia amb el problema del caminant aleatori.

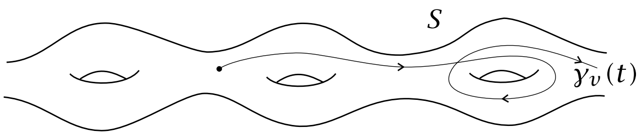

FIGURA 4

8 Conclusions

Algunes de les aportacions personals de Kolmogorov tenen a veure directament amb la llei del logaritme iterat. Suposem, com a (4), que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ és una martingala diàdica a $[0,1]$ amb increments uniformement acotats, per exemple, $|X_k| \le 1$. Sigui p un número real. Kolmogorov va desenvolupar amb èxit el mètode de *desigualtats exponencials*, que consisteix a buscar estimacions de les mitjanes

$$I(p,n) = \int_0^1 e^{pS_n(t)}\, dt \tag{15}$$

com a pas previ per a trobar estimacions del creixement de S_n. Observem que l'estimació trivial és $I(p,n) \le e^{|p|n}$ però de fet es pot demostrar

$$I(p,n) \le e^{\frac{1}{2}p^2 n}. \tag{16}$$

Evidentment, (16) representa una millora respecte a l'estimació trivial si p és petit. Un refinament de (16) combinat amb un argument tipus Borel-Cantelli dóna (4).

L'actualitat d'aquest cercle d'idees queda palesa quan formulem un dels problemes oberts més famosos en teoria geomètrica de funcions: la conjectura de Brennan. Aquesta conjectura afirma que si $f : \mathbb{D} \to \Omega$ és conforme, aleshores

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^{-2} d\theta = O\Big(\frac{1}{(1-r)^{1+\epsilon}}\Big)$$

per qualsevol $\epsilon > 0$. Observem que la integral anterior és exactament

$$\int_0^{2\pi} e^{pu(re^{i\theta})} d\theta$$

quan $u = \log|f'|$ i $p = -2$!

A banda de la contribució important de Makarov, l'ús de martingales diàdiques ha demostrat ser durant els últims vint anys una eina molt útil no només en valors frontera ([1], [2], [3], [5], [8], [10], [12], [14], [15], [16], [22]) sinó també en l'estudi de classes de Zygmund ([9], [13]), regularitat de mesures ([17], [24], [23]) i, sorprenentment, varietats hiperbòliques i grups kleinians ([6], [7]). Aquests exemples indiquen que el diàleg probabilitat-anàlisi continua sent intens i productiu.

Agraïments

Vull agrair a en Joaquim Bruna el seu suport i a en Juan Donaire i n'Artur Nicolau el seu valuós ajut i l'encert dels seus comentaris.

Referències

[1] Bañuelos, R.; Klemês, I.; Moore, C. N. «An analogue for harmonic functions of Kolmogorov's law of the iterated logarithm». *Duke Math. J.*, 57 (1988), 37–68.

[2] Bañuelos, R.; Klemês, I.; Moore, C. N. «The lower bound in the law of the iterated logarithm for harmonic functions». *Duke Math. J.*, 60 3 (1990), 689–715.

[3] Bañuelos, R.; Moore, C. N. *Probabilistic behaviour of harmonic functions.* Birkhauser, 1999.

[4] Beardon, A. F. *A primer on Riemann surfaces.* Cambridge Univ. Press, 1984.

[5] Betancor, J.; Fariña, J. C.; Llorente, J. G. «Axiomatic Potential Theory, asymptotic values and elliptic differential operators». *Potential Analysis*, 12 (2) (2000), 115–146.

[6] Bishop, C. J.; Jones, P. W. «The law of the iterated logarithm for kleinian groups». *Lipa's legacy. American Math. Soc.*, (1995), 17–50

[7] Bishop, C. J.; Jones, P. W. «Hausdorff dimension and kleinian groups». *Acta Math.*, 179 1 (1997), 1–39.

[8] Cantón, A. «Singular measures and the little Bloch space». *Publ. Mat.*, 42, (1998), 211–222.

[9] Carmona, J. J.; Donaire, J. J. «On removable singularities for the analytic Zygmund class». *Michigan Math. J.*, 43 1 (1996), 51–65.

[10] Chang, S. Y.; Wilson, J. M.; Wolff, T. H. «Some weighted norm inequalities for the Schrösinger operator». *Comm. Math. Helv.*, 60 (1985), 217–246.

[11] Donaire, J. J. «Conjuntos excepcionales para las clases de Zygmund». *Tesi. Universitat Autònoma de Barcelona* (1995).

[12] Donaire, J. J. «Radial behaviour of inner functions in $\mathcal{B}_0$» *J. London Math. Soc.*, 2 1 (2001), 141–158.

[13] Donaire, J. J. «Porosity of sets and the Zygmund class». *Bull. London Math. Soc.*, 34 6 (2002), 659–666.

[14] Donaire, J. J.; Pommerenke, Ch. «On radial behaviour and balanced Bloch functions». *Rev. Mat. Iber.*, 15 3 (1999), 429–449.

[15] González, M. J.; Koskela, P. «Radial growth of solutions of the Poisson equation». *Complex Variables*, 46 1, (2001), 59–72.

[16] González, M. J.; Koskela, P.; Llorente, J. G.; Nicolau, A. «Distributional inequalities for non-harmonic functions». *Indiana Univ. Math. J.*, 52 1 (2003), 191–226.

[17] González, M. J.; Nicolau, A. «Multiplicative square functions». Pendent de publicació en *Rev. Mat. Iber.*

[18] Kakutani, S. «Two dimensional brownian motion and harmonic functions». *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20 (1944), 706–714.

[19] Khintchine, A. «Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung». *Fund. Math.*, 6 (1924), 9–20.

[20] Kolmogorov, A. «Über das Gesetz des iterierten Logarithmus». *Math. Ann.*, 101 (1929), 126–135.

[21] Lévy, P. *Theorie de l'adition des variables aleatoires*. Gauthier-Villars, 1954.

[22] Llorente, J. G. «Boundary values of harmonic Bloch functions in Lipschitz domains: a martingale approach». *Potential Analysis*, 9 (1998), 229–260.

[23] Llorente, J. G. «On the Gehring-Hayman property, the Privalov-Riesz theorems and doubling measures». Pendent de publicació a *Michigan Math. J.*

[24] Llorente, J. G.; Nicolau, A. «Regularity properties of measures, entropy and the Law of the Iterated Logarithm». Pendent de publicació en *Proc. London Math. Soc.*

[25] Makarov, N. G. «On the distortion of boundary sets under conformal mapping». *Proc. London Math. Soc.*, 51 3 (1985), 369–384.

[26] Makarov, N. G. «Conformal mapping and Hausdorff measures». *Arkiv Mat.*, 25 (1987), 41–89.

[27] Makarov, N. G. «Smooth measures and the law of the iterated logarithm». *Izv. Akad. Navk SSSR Ser. Mat.*, 53 (1989), 439–446 (Russian). [Traducció anglesa: *Math. USSR Izv.* 34 (1990), 455–463]

[28] Makarov, N. G. «Probability methods in the theory of conformal mapping». *Algebra i Analiz*, (1989), 3–59 (Russian). [Traducció anglesa: *Leningrad Math. J.* 1 (1990), 1–56]

[29] O'neill, M. D. «Random walk and boundary behavior of functions in the disc». *Houston J. Math.*, 25 2 (1999), 379–386.

[30] Pommerenke, Ch. *Boundary behaviour of conformal maps*. Springer, 1992.

[31] Rohde, S. «The boundary behaviour of Bloch functions». *J. London Math. Soc.*, 48 2 (1993), 488–499.

[32] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.

[33] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Univ. Press, 1970.

[34] Stout, W. F. «A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm». *Z. Wahrs. Verw. Geb.*, 3 (1970), 211–226.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra, Barcelona
gonzalez@mat.uab.es